

【ブリッジ回路 合成抵抗 Bridge circuit Synthetic resistance】

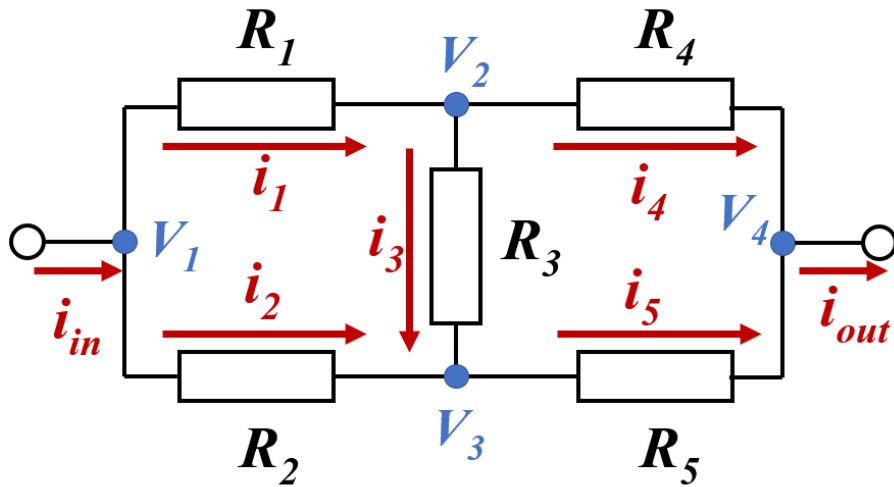


Figure 1: 各点での電位と電流を定義

■平衡条件を満たしていない場合

$$V_1 - V_3\{(V_1 - V_2) + (V_2 - V_3)\} = R_2 i_2 \text{ より}$$

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = R_2 i_2 \cdots (1)$$

$$V_2 - V_4\{(V_2 - V_3) + (V_3 - V_4)\} = R_4 i_4 \text{ より}$$

$$R_3 i_3 + R_5 i_5 = R_4 i_4 \cdots (2)$$

$i_5 = i_2 + i_3$, $i_4 = i_1 - i_3$ を用いて式 (2) を整理して

$$R_4 i_1 = R_5 i_2 + (R_3 + R_4 + R_5) i_3 \cdots (3)$$

ここで, $R_3 + R_4 + R_5 = R_{345}$ とおく. 式 (1), 式 (3) を i_1 について各々解くと以下の関係式を得る

$$\frac{R_2 i_2 - R_3 i_3}{R_1} = \frac{R_5 i_2 + R_{345} i_3}{R_4}$$

ここから

$$i_3 = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_5}{R_1 R_{345} + R_3 R_4} i_2$$

ここで, $k = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_5}{R_1 R_{345} + R_3 R_4}$ とおく. すると, $i_3 = k i_2$, $i_5 = i_2 + i_3 = (1 + k) i_2$ と書ける.
また, i_3 と i_5 を i_2 について解き, イコールで結ぶと

$$\frac{i_3}{k} = \frac{i_5}{1 + k}$$

$$i_5 = \frac{1 + k}{k} i_3$$

より $k \neq 0$ の条件がつく. これは, $R_2 R_4 \neq R_1 R_5$ を意味し, 平衡状態を満たしていない.

次に, 式 (1) の $R_1 i_1 + R_3 i_3 = R_2 i_2$ に $i_3 = k i_2$ を代入して

$$R_1 i_1 + R_3 k i_2 = R_2 i_2$$

となり, $R_1 i_1 = (R_2 - kR_3) i_2$ となる. ここから

$$i_2 = \frac{R_1}{R_2 - kR_3} i_1$$

と書ける.

ここで, $\frac{R_1}{R_2 - kR_3} = l$ とおくと $i_2 = l i_1$ と書ける. また, $i_4 = i_1 - i_3 = i_1 - k l i_1 = (1 - kl) i_1$ となる.

$V_1 - V_2 = R_1 i_1, V_2 - V_4 = R_4 i_4$ から

$$V_1 - V_4 = R_1 i_1 + R_4 i_4$$

となり $i_4 = (1 - kl) i_1$ を用いると

$$V_1 - V_4 = \{R_1 + R_4(1 - kl)\} i_1$$

i_1 について解くと

$$i_1 = \frac{1}{R_1 + R_4(1 - kl)} (V_1 - V_4)$$

となる. ここで i_{in} もみておく

$$i_{in} = i_1 + i_2 = (1 + l) i_1$$

ところで, 求めたい合成抵抗を R' とおくと

$$i_{in} = \frac{1}{R'} (V_1 - V_4)$$

が成立するので

$$i_{in} = \frac{1}{R'} (V_1 - V_4) = (1 + l) i_1 = \frac{1 + l}{R_1 + R_4(1 - kl)} (V_1 - V_4)$$
$$\frac{1}{R'} (V_1 - V_4) = \frac{1 + l}{R_1 + R_4(1 - kl)} (V_1 - V_4)$$

以上から合成抵抗 R' は

$$R' = \frac{R_1 + R_4(1 - kl)}{1 + l}$$

ただし, $k = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_5}{R_1 R_{345} + R_3 R_4} \neq 0, l = \frac{R_1}{R_2 - kR_3}$ である.

■平衡条件を満たしている場合

$V_2 = V_3 (i_3 = 0)$ の場合は $R_1 i_1 = R_2 i_2$ から

$$i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1$$

よって, 前述の l は

$$l = \frac{R_1}{R_2}$$

となり

$$l = \frac{R_1}{R_2 - kR_3} = \frac{R_1}{R_2}$$

を k について解くと $k = 0$ となるので

$$k = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_5}{R_1 R_{345} + R_3 R_4} = 0$$

ここから, $R_2 R_4 = R_1 R_5$ (平衡条件) となる.

前に導出した合成抵抗 $R' = \frac{R_1 + R_4(1 - kl)}{1 + l}$ は, 今回 $k = 0$ のため用いることはできないが, 幸い $i_3 = 0$ より $i_1 = i_4, i_2 = i_5$ が成り立つため, 直列回路と並列回路を組み合わせた単純な回路となる. よって, 合成抵抗は

$$R' = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_5)}{(R_1 + R_4) + (R_2 + R_5)}$$

となる.

Source Code 1: Scilab

```
////////////////////////////////////
//      ブリッジ回路 合成抵抗
//      Bridge circuit
//      Synthetic resistance
//
//                                          M.Tsutsui
////////////////////////////////////

clear;

R1=4;
R2=8;
R3=5;
R4=10;
R5=20;

R345=R3+R4+R5;
k=(R2*R4-R1*R5)/(R1*R345+R3*R4);
l=R1/(R2-R3*k);

SR=(R1+R4*(1-k*l))/(1+l)//合成抵抗(平衡条件を満たしていない場合)
```

Source Code 2: Python

```
#-----
# Name: Bridge circuit Synthetic resistance
# Author: m.tsutsui
#-----

if __name__ == '__main__':
    R1=4
    R2=8
    R3=5
    R4=10
    R5=20

    R345=R3+R4+R5
    k=(R2*R4-R1*R5)/(R1*R345+R3*R4)
    l=R1/(R2-R3*k)

    SR=(R1+R4*(1-k*l))/(1+l);#Synthetic resistance
    print(SR)
```