【ベイズ推定（多次元）　Bayesian Estimation -Multivariate- 】

係数ベクトル $\boldsymbol{H}$，信号ベクトル $\boldsymbol{x}$，ノイズベクトル $\boldsymbol{w}$，出力方程式 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$ とする．

確率分布は，信号ベクトル $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi})$，ノイズベクトル $\mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Lambda})$，事後分布 $\mathcal{N}(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\Gamma})$ の正規分布に従うとする．
また，$\boldsymbol{\Psi} = \mathbb{E}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T]$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbb{E}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T]$ である．

事後分布の指数部を計算すると，

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{\boldsymbol{x}} + Const$$

となる．ベイズの定理 $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x})$ より，尤度，事前分布の指数部の和を求める．

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})] \\ &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\Psi}^{-1} + \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{H})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\Psi}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{\mu}) + Const \end{aligned}$$

事後分布との指数部恒等条件より，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} &= \boldsymbol{\Psi}^{-1} + \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\Psi}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここから，以下の推定値を得る．

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\Psi}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{\Psi}^{-1} + \boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{H})^{-1}(\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\Psi}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{\mu})$$

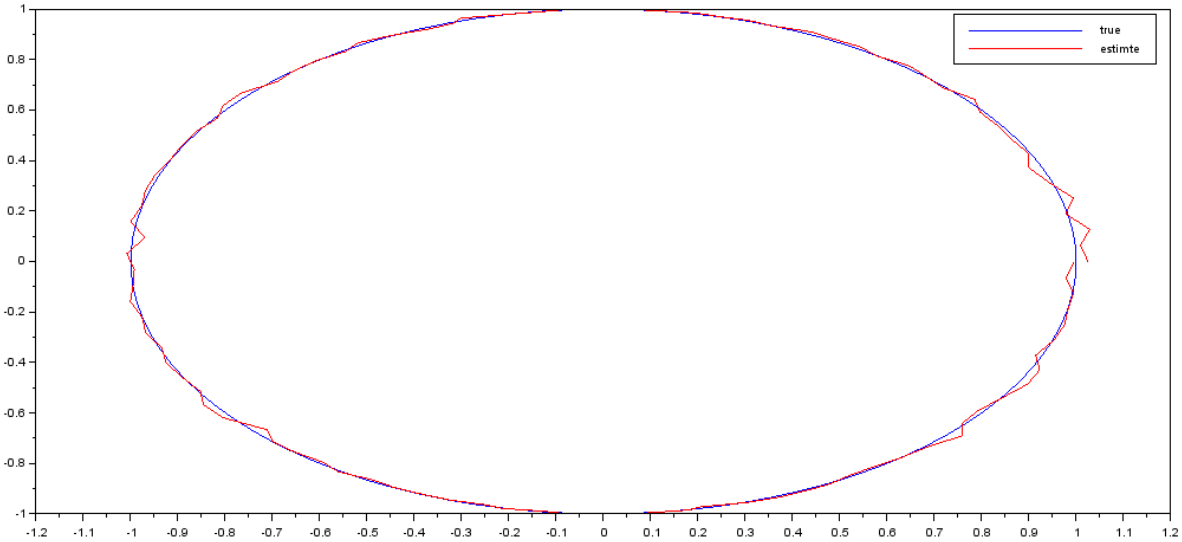

Figure 1: Scilab 実行結果

Source Code 1: Scilab

```
//////////////////////////////////////////////
//      ベイズ推定-多次元-
//      Bayesian Estimation -Multivariate-
//
//                                    M.Tsutsui
//////////////////////////////////////////////

clear;

d_size=100;//データサイズ

w=(rand(d_size,2)-rand(d_size,2)); //ノイズ
H_gain=3;//係数ベクトルゲインで推定精度調整
H=H_gain*(rand(d_size,d_size)-rand(d_size,d_size));//係数ベクトル
t=linspace(0,2*%pi,d_size);
x1=cos(t);
x2=sin(t);
x=[x1',x2'];//真値

y=H*x+w;//観測信号

mu=[mean(x1)*ones(d_size,1),mean(x2)*ones(d_size,1)];//信号ベクトル 平均

pusi=x*x';//信号ベクトル 分散

lambda=w*w';//ノイズベクトル 分散

x_bar=inv(inv(pusi)+H'*inv(lambda)*H+2)*(H'*inv(lambda)*y+inv(pusi)*mu);//推定値

plot(x1,x2);//真値
plot(x_bar(:,1),x_bar(:,2),'r');//推定値
legend(['true';'estimte']);

//警告表示あり
```