

【双一次Z変換を用いたフィルタ設計例 Bilinear Transform and Filter Design】

■ 1次LPF

設計する1次IIRフィルターの伝達関数を, $G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$ - (*) とする.

アナログフィルタ R-C1次LPFの伝達関数は, $G(s) = \frac{1}{1 + sCR}$ である.

双一次Z変換 $s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ (T_s : サンプリング間隔) を代入し, (*) との恒等条件から, 次のIIRフィルターの係数を得る.

$$a_0 = \frac{T_s}{T_s + 2RC}, a_1 = \frac{T_s}{T_s + 2RC}, b_1 = -\frac{T_s - 2RC}{T_s + 2RC}$$

■ 2次LPF

設計する1次IIRフィルターの伝達関数を, $G(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$ とする.

アナログフィルタ R-L-C2次LPFの伝達関数は, $G(s) = \frac{1}{s^2 LC + sCR + 1}$ である.

ここで, 二次LPFの伝達関数: $G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$ に合わせると, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

ここから双一次Z変換を施し, 各係数を求めると以下のようにになる.

$$a_0 = \frac{\omega_0^2 T_s^2 Q}{4Q + 2\omega_0 T_s + \omega_0^2 T_s^2 Q}, a_1 = \frac{2\omega_0^2 T_s^2 Q}{4Q + 2\omega_0 T_s + \omega_0^2 T_s^2 Q}, a_2 = \frac{\omega_0^2 T_s^2 Q}{4Q + 2\omega_0 T_s + \omega_0^2 T_s^2 Q}$$

$$b_1 = \frac{8Q - 2\omega_0^2 T_s^2 Q}{4Q + 2\omega_0 T_s + \omega_0^2 T_s^2 Q}, b_2 = \frac{2\omega_0 T_s - 4Q - \omega_0^2 T_s^2 Q}{4Q + 2\omega_0 T_s + \omega_0^2 T_s^2 Q}$$

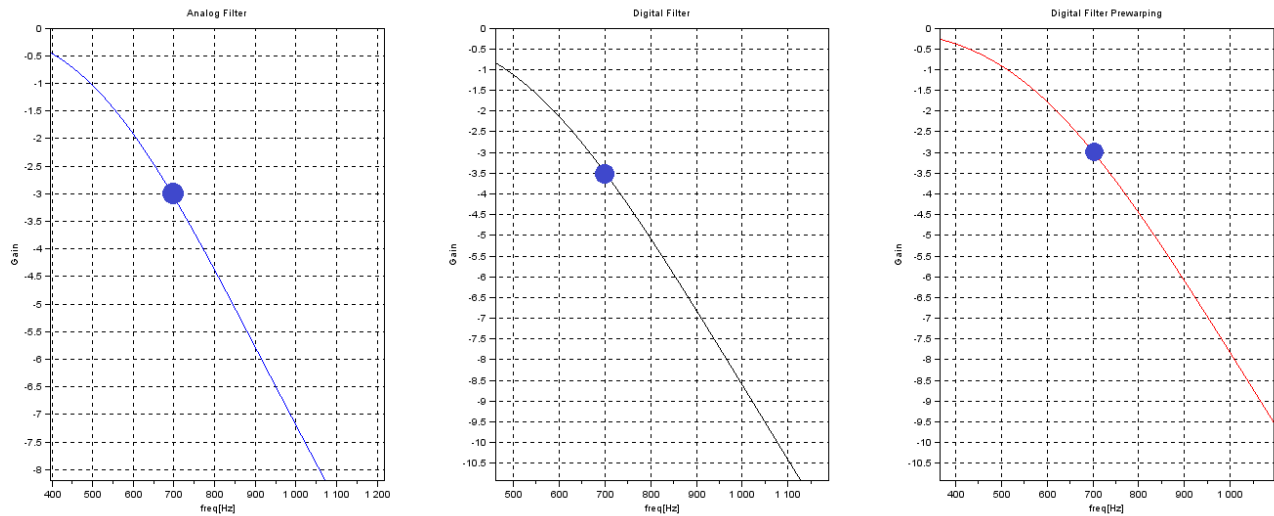


Figure 1: Scilab 実行結果
プリワーピング処理

左:アナログフィルタ 中:デジタルフィルタ 右:デジタルフィルタ (プリワーピング)

双一次Z変換を用いて, RLC-2次LPFを設計.

カットオフ周波数:700Hz, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ としてシミュレート.

プリワーピングを用いて, カットオフ周波数時のみポイント一致.

```

////////////////////////////////////
//      RLC 2次LPF
//
//      M.Tsutsui
////////////////////////////////////

clear all;

//////////初期設定//////////
j=%i;//虚数
pi=%pi;//π
eps=%eps;
//////////
fcut=700;//カットオフ周波数
f=linspace(0,2000,300) //周波数
fs=6000;//サンプリング周波数
Ts=1/fs;//サンプリング間隔
////////アナログフィルター定数 カットオフ700Hz,Q = 1/√2 //////////
R=622; //抵抗
L=0.1;//自己インダクタンス
C=0.52*10^(-6); //静電容量

//////////s-z定義//////////
omega=2*pi*f;
s=j*omega;
Z=exp(j*omega*Ts);
//////////デジタルフィルター係数//////////
Q=1/R*sqrt(L/C);
omega_0=1/sqrt(L*C);
a_0=((omega_0^2)*(Ts^2)*Q)/(4*Q+2*omega_0*Ts+(omega_0^2)*Q*(Ts^2))
a_1=(2*(omega_0^2)*(Ts^2)*Q)/(4*Q+2*omega_0*Ts+(omega_0^2)*Q*(Ts^2))
a_2=((omega_0^2)*(Ts^2)*Q)/(4*Q+2*omega_0*Ts+(omega_0^2)*Q*(Ts^2))
b_1=(8*Q-2*(omega_0^2)*Q*(Ts^2))/(4*Q+2*omega_0*Ts+(omega_0^2)*Q*(Ts^2))
b_2=(-4*Q-(omega_0^2)*Q*(Ts^2)+2*omega_0*Ts)/(4*Q+2*omega_0*Ts+(omega_0^2)*Q*(Ts^2))

//////////Prewarping//////////

omegaA=2/Ts*tan((2*pi*fcut*Ts)/2);//角周波数
fix_freq_A=omegaA/(2*pi)//修正周波数 733Hz

R_update=651; //抵抗
L_update=0.1;//自己インダクタンス
C_update= 0.47*10^(-6); //静電容量

Q_p=1/R_update*sqrt(L_pdate/C_update);
omega_0_p=1/sqrt(L_update*C_update);
a_0_p=((omega_0_p^2)*(Ts^2)*Q_p)/(4*Q_p+2*omega_0_p*Ts+(omega_0_p^2)*Q_p*(Ts^2))
a_1_p=(2*(omega_0_p^2)*(Ts^2)*Q_p)/(4*Q_p+2*omega_0_p*Ts+(omega_0_p^2)*Q_p*(Ts^2))
a_2_p=((omega_0_p^2)*(Ts^2)*Q_p)/(4*Q_p+2*omega_0_p*Ts+(omega_0_p^2)*Q_p*(Ts^2))
b_1_p=(8*Q_p-2*(omega_0_p^2)*Q_p*(Ts^2))/(4*Q_p+2*omega_0_p*Ts+(omega_0_p^2)*Q_p*(Ts^2))
b_2_p=(-4*Q_p-(omega_0_p^2)*Q_p*(Ts^2)+2*omega_0_p*Ts)/(4*Q_p+2*omega_0_p*Ts+(omega_0_p^2)*Q_p*(Ts^2))

subplot(131)
G_s=j./((s^2)*C*L+s*C*R+1);
Res_s=20*log10(abs(G_s)/max(abs(G_s)));
plot(f,Res_s);
xgrid();
xlabel('','freq[Hz]','Gain');
title(' Analog Filter ');

subplot(132)

```

```

G_z=(a_0+a_1*(Z^-1)+a_2*(Z^-2))./(1-b_1*(Z^-1)-b_2*(Z^-2));
Res_z=20*log10(abs(G_z)/max(abs(G_z)));
plot(f,Res_z,'k');
xgrid();//grid on
xlabel('','freq[Hz]','Gain');
title('Digital_Filter');

subplot(133)
G_z_p=(a_0_p+a_1_p*(Z^-1)+a_2_p*(Z^-2))./(1-b_1_p*(Z^-1)-b_2_p*(Z^-2));
Res_z_p=20*log10(abs(G_z_p)/max(abs(G_z_p)));
plot(f,Res_z_p,'r');//
xgrid();//grid on
xlabel('','freq[Hz]','Gain');
title('Digital_Filter_Prewarping');

```