【確率分布パラメータ推定　Probability distribution Parameter Estimation】

分散既知の場合のデータ平均値推定
データ全体の分散を既知とし，ベイズ推定を用いてデータ全体の平均を推定する．
□データ:　$D = \{x_n\ (n = 1, \cdots, N)\}$　$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ の正規分布に従うとし，σ^2 は既知とする．

$$f(D|\mu, \sigma^2) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

□事前分布: $\mathcal{N}(\mu|\mu_0, \sigma_0^2)$ の正規分布

$$f(\mu|\mu_0, \sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left[-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

□事後分布: $\mathcal{N}(\mu|\mu_N, \sigma_N^2)$ の正規分布
ベイズの定理より，

$$f(\mu|D) \propto f(D|\mu) f(\mu) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu - \mu_0)^2\right]$$

尤度と事前分布の指数部から，事後分布の平均 μ_N を導出すると，

$$\underline{\mu_N = \frac{\sigma^2}{N\sigma_0^2 + \sigma^2}\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{N\sigma_0^2 + \sigma^2}\sum_{n=1}^{N} x_n}$$

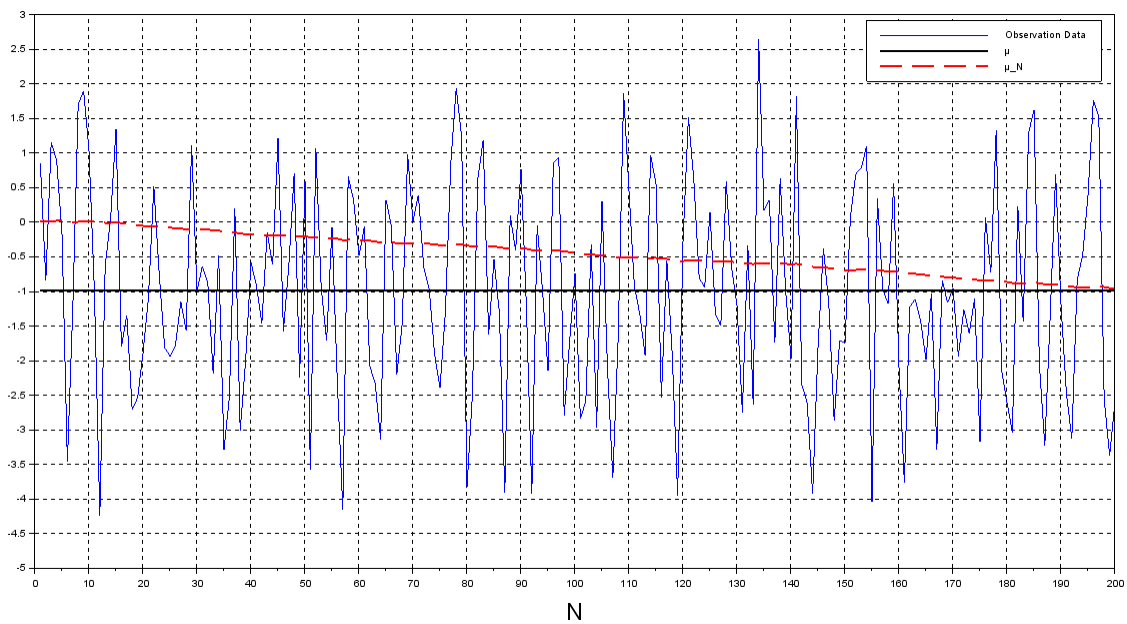

Figure 1: Scilab 実行結果
全データ　平均値推定（漸近）

Source Code 1: Scilab

```
////////////////////////////////////
//      確率分布パラメータ推定
//      Probability distribution
//           Parameter Estimation
//
//                        M.Tsutsui
```

```
//////////////////////////////////////

clear;

data_num=200;//データ数
data=linspace(0,data_num,data_num);
x=sin(data)+2*rand(1,data_num)-4*rand(1,data_num); //観測データ

[size1,size2]=size(x);

E_x=mean(x);//全データ平均 μ
var_x=variance(x);//全データ分散 σ


//___事前分布_____//
mu_zero=1;//平均 μ0
sigma_zero=1;//分散 σ0


est=[];
for i=1:1:size2;
    est=[est,(var_x/(size2*sigma_zero+var_x)*mu_zero+sigma_zero/(size2*sigma_zero+var_x)*sum(x(1:i)))];//μ_N
end


plot(x);//観測データ
plot(E_x*ones(1,data_num),'k');//データ全体の平均
a=gce();
c=a.children;
c.thickness = 2;

plot(est,'r--');//μ_N
a=gce();
c=a.children;
c.thickness = 2;

xlabel('N','fontsize',5);
xgrid();
hl=legend(['Observation Data';'μ';'μ_N';]);
```