【二項分布 Binomial Distribution】

■分布

$B(n,p) = {}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k}$

■平均導出

二項定理より, $(p+q)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, p^k q^{n-k} - (*)$

両辺 p で微分後,$q = 1-p$ を代入し, 両辺に p を乗算すると,

$$np(p+1-p)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\, {}_n\mathrm{C}_k\, p^k q^{n-k}$$

$\therefore \underline{\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, {}_n\mathrm{C}_k\, p^k q^{n-k} = np}$

■分散導出

$(*)$ の両辺を p で 2 回微分後,$q = 1-p$ を代入し, 両辺に p^2 を乗算すると,

$$n(n-1)(p+1-p)^{n-2}p^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$n(n-1)p^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k\, {}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^2) - np$$

ここから, $\mathbb{E}(X^2) = n(n-1)p^2 + np$

$\therefore \underline{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)}$

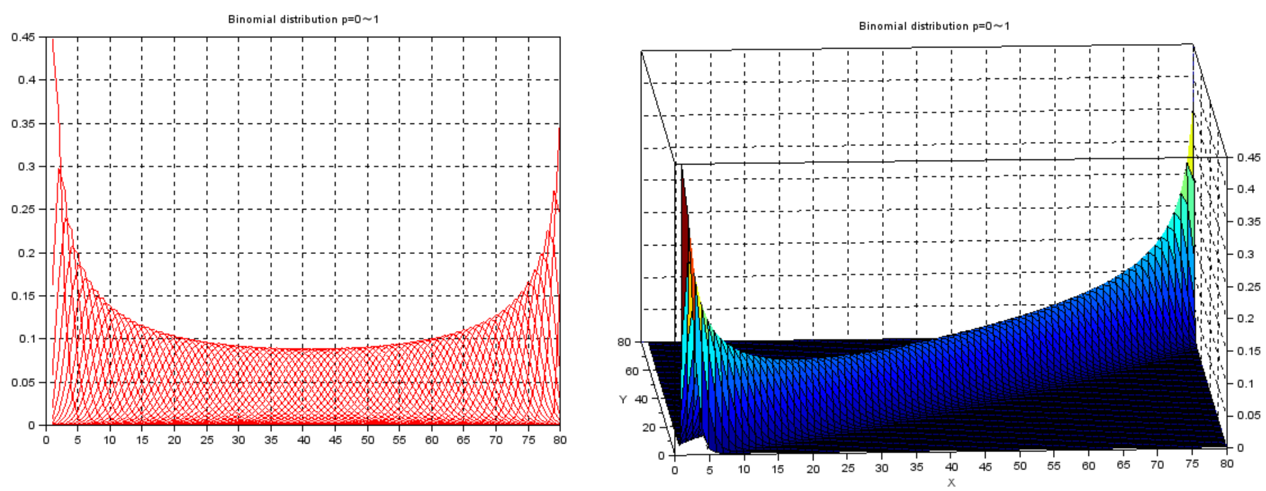

Figure 1: Scilab 実行結果
p=0.01～1,n=80

Source Code 1: Scilab

```
////////////////////////////////
//      二項分布
//      Binomial Distribution
//
//                   M.Tsutsui
////////////////////////////////

prob=0.01:0.0125:1;//確率Sweep
[size1,size2]=size(prob)
n=size2;
Res=[];
for p=prob;
        for k=0:1:n-1;
                loop=factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))*p^k*(1-p)^(n-k);//二項分布
                Res=[Res,loop];
        end
end

Res_ana=[];

for J=1:1:n;
            Res_ana=[Res_ana;Res(n*J-(n-1):n*J)];//1*N^2 Matrix -> N*N Matrix
end


///////_2次元プロット_////////
for I=1:80;
    plot(Res_ana(I,:),'r');
end
xgrid();
title('Binomial distribution p=0〜1');

///////_3次元プロット_////////
surf(Res_ana);
set(gcf(),'color_map',jetcolormap(256));
xgrid();
title('Binomial distribution p=0〜1');
```